**Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение**
**«Лицей №6»**

О.Н. Желтова, М.Г. Немченко, Е.М. Терехова

# ЛОГИКА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ.

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ**

**ТАМБОВ 2020**

**Авторы-составители:** Желтова Ольга Николаевна, Немченко Марина Германовна, Терехова Екатерина Михайловна – учителя математики МАОУ «Лицей №6» города Тамбова

**Рецензент**: Е.А. Плужникова, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры функционального анализа ФГБОУ ВО «ТГУ им. Г.Р. Державина.

В учебно-методическом пособии рассматриваются вопросы разделов «Логика и доказательство» курса «Дискретная математика». Пособие содержит основные теоретические сведения; необходимые для решения задач, рассмотрены типовые задачи с подробными решениями; приводятся решения типичных заданий, даны упражнения с решениями и задания для самостоятельного решения (с ответами, указаниями к решению или решениями); содержатся контрольные вопросы для самопроверки.

В учебно-методическом пособии даны методические рекомендации по некоторым аспектам совершенствования преподавания дискретной математики.

Методические материалы носят практико - ориентированный характер, нацелены на деятельностное освоение теоретических основ предмета.

Данное пособие подготовлено в рамках реализации мероприятия «Развитие и распространение лучшего опыта в сфере формирования цифровых навыков образовательных организаций, осуществляющих образовательную деятельность по общеобразовательным программам, имеющих лучшие результаты в преподавании предметных областей «Математика», «Информатика» и «Технология» в рамках федерального проекта «Кадры для цифровой экономики» национальной программы «Цифровая экономика Российской Федерации» государственной программы Российской Федерации «Развитие образования».

Материалы могут быть полезны учителям математики, учащимся для самостоятельной подготовки к ЕГЭ и поступлению в ВУЗ, а также всем желающим познакомиться со школьной абстрактной математикой.

Содержание

Логика необходима в любой формальной дисциплине и состоит из правил получения обоснованного вывода (заключения). Логику можно выделить из контекста тех дисциплин, в которых она используется, и изучать как отдельный раздел науки. Акцент в этой главе будет сделан именно на логике, лежащей в основе неоспоримых рассуждений и доказательств. Мы познакомимся с логикой высказываний, имеющей дело с истинностью (или ложностью) простых описательных утверждений.

# Глава 1. Высказывания и логика.

Прежде чем непосредственно приступить к проблематике логики, необходимо иметь хотя бы общее представление о самой этой науке – уяснить себе ее предмет, познакомиться с историей ее возникновения и развития вплоть до наших дней, осмыслить ее принципиальное значение для научного познания и практической деятельности. Без такого общего представления о логике в целом трудно понять отбор самих логических проблем, оценить место и значение каждой из них в ряду других.

Логика высказываний, называемая также пропозициональной логикой - раздел математики и логики, изучающий логические формы сложных высказываний, построенных из простых или элементарных высказываний с помощью логических операций.

## 1.1. Что представляет собой логика. Истинные, ложные высказывания.

### Возникновение и этапы развития традиционной формальной логики.

Свое название логика получила от древнегреческого слова *logos*, означавшего, с одной стороны, слово, речь, а с другой – мысль, смысл, разум.

Возникновению логики как теории предшествовала уходящая в глубь тысячелетий практика мышления. С развитием трудовой, материальнопроизводственной деятельности людей шло постепенное совершенствование и развитие их мыслительных способностей, прежде всего способности к абстракции и умозаключению. А это рано или поздно, но неизбежно должно было привести к тому, что объектом исследования стало само мышление с его формами и законами.

**Этапы развития логики**

**1-й этап** связан с работами учёного и философа Аристотеля (384-322 гг до н.э.). Он пытался найти ответ на вопрос, как мы рассуждаем; изучал правила мышления. Он впервые дал систематическое изложение логики, подверг анализу формы человеческого мышления: понятия, суждения, умозаключения. Так возникла формальная логика.

**Формальная логика** – наука о законах и формах мышления. Связана с анализом наших обычных содержательных умозаключений, выражаемых разговорным языком.

**2-й этап** связан с работами немецкого учёного и философа Лейбница (1646-1716 гг). Он сделал попытку построить первые логические исчисления. Считал, что простые рассуждения можно заменить действиями со знаком и прив1л соответствующие правила. Так возникла математическая логика.

**Математическая логика** – наука о логических связях и отношениях, лежащих в основе дедуктивного (логического) вывода. Она изучает суждения для которых можно однозначно решить, истинны они или ложны.

**3-й этап** связан с работами Джорджа Буля (1815-1864 гг). Он развил идеи Лейбница. В его работах логика обрела свой алфавит, орфографию и грамматику. Буль считается основоположником математической логики как самостоятельной дисциплины. Начальный раздел её называют **булевой алгеброй или алгеброй логики.**

Известный вклад в развитие традиционной формальной логики внесли русские ученые. Так, уже в первых трактатах по логике начиная приблизительно с X в. предпринимались попытки самостоятельного комментирования трудов Аристотеля и других ученых. Оригинальные логические концепции в России разрабатывались в XVIII в. и были связаны прежде всего с именами М. Ломоносова (1711–1765) и А. Радищева (1749–1802). Расцвет логических исследований в нашей стране относится к концу XIX в. Так, М. Каринский (1840–1917) создал оригинальную общую теорию выводов – как дедуктивных, так и индуктивных. Труды его ученика Л. Рутковского (1859–1920) были посвящены прежде всего основным типам умозаключений, их дальнейшей разработке, и представляли собой, по сути, частный случай более общей теории логических отношений. С. Поварнин (1870–1952) стремился разработать общую теорию отношений в логике. Дальнейшее развитие традиционная логика получила в годы Советской власти. Она успешно разрабатывается и в наши дни.

**О. Логика** – это наука о формах и законах правильного мышления. Логика появилась приблизительно в 4 веке до н. э. в Древней Греции. Ее создателем считается знаменитый древнегреческий философ и ученый Аристотель.

Одна из главных задач логики – определить, как прийти к выводу из предпосылок и получить истинное знание о предмете размышления. Она интересуется не содержанием мышления, а его формой, поэтому ее часто называют еще формальной логикой.

**О. Форма мышления** — это способ выражения мыслей или форма, по которой они строятся.

**О.** Форма, обозначающая какой–либо объект или отличающий его признак, называется **понятием**. Примеры понятий: «компьютер», «планета», «длина», «профессия».

**О.** Форма, утверждающая или отрицающая что–либо о свойствах понятий и отношений между ними, называется **высказыванием** (утверждением, суждением). Пример высказывания: «Париж — столица Франции».

**О.** Форма, в которой из двух или нескольких высказываний получают новое утверждение, называется **умозаключением**. Пример умозаключения: «Периферийные устройства компьютера — это устройства для ввода или вывода информации. Сканер — устройство для переноса текста и изображений с бумаги в компьютер. Следовательно, сканер — периферийное устройство».

Правила, которые должны соблюдаться, чтобы на основании истинных суждений получить истинные выводы, — это **законы мышления**. Логика изучает эти законы и способы получения новых утверждений на основании уже имеющихся.

Математическая логика использует для установления истинности или ложности высказываний математические методы. Она пользуется специальным символьным языком, подобным языку математики, поэтому ее часто называют символьной логикой.

**О. Алгебра логики** — раздел математической логики, в котором методы алгебры используются в логических преобразованиях. Она изучает логические высказывания и методы установления их истинности или ложности с помощью алгебраических методов.

**О. Логическое высказывание** — это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно утверждать, что его содержание истинно или ложно. Вопросительные и повелительные предложения не являются логическими высказываниями. Но и не каждое повествовательное предложение является логическим высказыванием. Например, суждение «Лето было очень дождливым» не является однозначным, для утверждения «Существует несколько Вселенных» нельзя однозначно определить истинность; поэтому такие предложения не являются логическими высказываниями (утверждениями).

Таким образом, отличительной особенностью логических высказываний является возможность принимать одно из двух значений — **истина** и **ложь**. Истинность или ложность высказывания определяется вне алгебры логики — с помощью наблюдений, научных исследований, практических опытов и т. п.

В алгебре логики различают простые высказывания и сложные (составные), составленные из нескольких простых. Если в высказывании нельзя выделить некую часть, которая не совпадает по смыслу с исходным высказыванием и сама является высказыванием, то оно называется простым высказыванием. Простые высказывания обычно обозначаются латинскими буквами A, B, C и т. д.

Остановимся подробнее на простых логических высказываниях. Понятие высказывания является начальным, неопределяемым понятием.

## Упражнения

**1.** Установите, какие из следующих предложений являются логическими высказываниями, а какие — нет (объясните почему):

**а)** “Солнце есть спутник Земли”;
**б)** “2+3·4”;
**в)** “сегодня отличная погода”;
**г)** “в романе Л.Н. Толстого “Война и мир” 3 432 536 слов”;
**д)** “Санкт-Петербург расположен на Неве”;
**е)** “музыка Баха слишком сложна”;
**ж)** “первая космическая скорость равна 7.8 км/сек”;
**з)** “железо — металл”;
**и)** “если один угол в треугольнике прямой, то треугольник будет тупоугольным”;
**к)** “если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей, то он прямоугольный”.

**2.** Укажите, какие из высказываний предыдущего упражнения истинны, какие — ложны, а какие относятся к числу тех, истинность которых трудно или невозможно установить.

**3.** Установите, какие из приведенных ниже предложений являются суждениями:

**а)** Рукописи не горят.
**б)** Нет такого лабиринта, из которого не было бы выхода.
**в)** «Прощай, свободная стихия!» (А.С.Пушкин).
**г)** «Что яростной толпе сраженный гладиатор?» (М.Ю.Лермонтов).
**д)** Кто автор сочинения «Война и мир»?
**е)** Где наше не пропадала?
**ж)** Сколько волка не корми, он все в лес просится.
**з)** «В речи, как и в жизни, надо всегда иметь в виду, что уместно» (Цицерон).

**4.** Приведите примеры истинных и ложных высказываний:

**а)** из арифметики;

**б)** из физики;

**в)** из биологии;

**г)** из информатики;

**д)** из геометрии;

**е)** из жизни.

**5.** Определите значения истинности высказываний:

**а)** “наличия аттестата о среднем образовании достаточно для поступления в институт”;

**б)** “наличие аттестата о среднем образовании необходимо для поступления в институт”;

**в)** “если целое число делится на 6, то оно делится на 3”;

**г)** “подобие треугольников является необходимым условием их равенства”;

**д)** “подобие треугольников является необходимым и достаточным условием их равенства”;

**е)** “треугольники подобны только в случае их равенства”;

**ж)** “треугольники равны только в случае их подобия”;

**з)** “равенство треугольников является достаточным условием их подобия”;

**и)** “для того, чтобы треугольники были неравны, достаточно, чтобы они были неподобны”;

**к)** “для того, чтобы четырёхугольник был квадратом, достаточно, чтобы его диагонали были равны и перпендикулярны”.

**6.** Укажите номера верных утверждений:

**а)** Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, прямой.

**б)** Все диаметры окружности равны между собой.

**в)** Все хорды одной окружности равны между собой.

**г)** Две окружности пересекаются, если радиус одной окружности больше радиуса другой окружности.

**д)** Касательная к окружности параллельна радиусу, проведённому в точку касания.

**е)** Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

**ж)** Любой параллелограмм можно вписать в окружность.

**7.** Укажите номера верных утверждений:

**а)** Любые два диаметра окружности пересекаются.

**б)** Расстояние от точки, лежащей на окружности, до центра окружности равно радиусу.

**в)** Точка пересечения двух окружностей равноудалена от центров этих окружностей.

**г)** Угол, вписанный в окружность, равен соответствующему центральному углу, опирающемуся на ту же дугу.

**д)** Центр описанной около треугольника окружности всегда лежит внутри этого треугольника.

**е)** Центры вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника совпадают.

**ж)** Через любую точку, лежащую вне окружности, можно провести две касательные к этой окружности.

**8.** Укажите номера неверных утверждений:

**а)** В любой прямоугольник можно вписать окружность.

**б)** Диагонали любого прямоугольника делят его на четыре равных треугольника.

**в)** Диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам.

**г)** Если диагонали параллелограмма равны, то это прямоугольник.

**д)** Существует прямоугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны.

**е)** Любой прямоугольник можно вписать в окружность

**ж)** Все углы прямоугольника равны.

**з)** В любом прямоугольнике диагонали взаимно перпендикулярны.

**и)** Площадь прямоугольника равна произведению длин всех его сторон.

**9.** Укажите номера неверных утверждений:

**а)** Площадь прямоугольника равна произведению длин его смежных сторон.
**б)** Если в параллелограмме диагонали равны и перпендикулярны, то этот параллелограмм является квадратом.
**в)** Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм является квадратом.
**г)** Если диагонали выпуклого четырёхугольника равны и перпендикулярны, то этот четырёхугольник является квадратом.
**д)** Любой квадрат является прямоугольником.
**е)** Площадь квадрата равна произведению двух его смежных сторон.
**ж)** Площадь квадрата равна произведению его диагоналей.
**з)** Существует квадрат, который не является прямоугольником.
**и)** Все квадраты имеют равные площади.

## 1.2. Составные высказывания. Таблицы истинности логических операций.

Высказывания можно рассматривать как величину, которая может принимать два значения: «истина» и «ложь».

Например, даны суждения: "кошка - птица", "$3 < 5$". Первое из этих высказываний может быть оценено символом «ложь», второе – «истина». Такая трактовка высказываний составляет предмет алгебры высказываний. Будем обозначать высказывания большими латинскими буквами A, B, …, а их значения, то есть истину и ложь, соответственно И и Л.

Используя такие логические операции, как **не, или, и,** можно построить новые, так называемые **составные высказывания**, компануя более простые. Например, связка "и". Пусть даны высказывания: "$\pi$ больше 3" и высказывание "$\pi$ меньше 4". Можно организовывать новое - сложное высказывание "$\pi$ больше 3 и $\pi$ меньше 4". Высказывание "если $\pi$ иррационально, то $\pi^2$ тоже иррационально" получается связыванием двух высказываний связкой "если - то". Наконец, мы можем получить из какого-либо высказывания новое - составное высказывание - отрицая первоначальное высказывание.

В алгебре логики логические связки рассматриваются как логические операции. Они имеют свои названия и обозначения. Результаты применения каждой операции к логическим высказываниям (истинным или ложным) можно представить в виде таблицы. В ней указывают все возможные сочетания значений исходных логических высказываний и истинность или ложность результата. Такие таблицы называют **таблицами истинности** операции.

Основные логические операции — отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, исключающая дизъюнкция, следование, эквивалентность.

**О. Отрицанием** произвольного высказывания *P* называется высказывание вида (не *P*), чье истинностное значение строго противоположно значению *P*. Определяющая таблица истинности отрицания высказывания приведена в табл. 1.1.

| ***P*** | ***не P*** |
|---|---|
| И | Л |
| Л | И |

табл.1.1.

**О. Конъюнкцией** или **логическим умножением** операция, соединяющая два или более высказываний при помощи связки «и». Эта связка символически обозначается с помощью знака ∧ и читается «A и B». Для обозначения конъюнкции также применяются знаки: A • B, A & B, A и B, A and B, а иногда между высказываниями не ставится никакого знака: AB.

Высказывание A ∧ B истинно только тогда, когда оба высказывания A и B истинны. Высказывание A ∧ B ложно только тогда, когда ложно хотя бы одно из высказываний A или B. Соответствующая таблица истинности — табл. 1.2.

| ***P*** | ***Q*** | ***P* ∧ *Q*** |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| И | И | И |
| И | Л | Л |
| Л | И | Л |
| Л | Л | Л |

табл. 1.2.

**О. Дизъюнкцией** или **логическим сложением** операция, соединяющая два или более высказываний при помощи связки «или». Эта связка символически обозначается с помощью знака ∨ и читается «А или В». Для обозначения дизъюнкции также применяются знаки: А + В, А или В, А or В, А | В.

Высказывание А ∨ В истинно только тогда, когда хотя бы одно из высказываний А или В истинно. Высказывание А ∨ В ложно только тогда, когда оба высказывания А и В ложны. Таблица истинности дизъюнкции обозначена как табл. 1.3.

| ***P*** | ***Q*** | ***P* ∨ *Q*** |
|---|---|---|
| И | И | И |
| И | Л | И |
| Л | И | И |
| Л | Л | Л |

табл. 1.3.

**О. Исключающее сложение** (исключающая дизъюнкция, строгая дизъюнкция, сложение по модулю два, дизъюнкция строго–разделительная) — логическая операция, соединяющая два высказывания при помощи связки «или», употребленной в исключающем смысле (называется также исключающее «или»). Операция символически обозначается с помощью знака ⊕ и читается «либо А, либо В».

Высказывание А $\oplus$ В истинно только тогда, когда высказывания А и В имеют различные значения. Таблица истинности исключающего сложения обозначена как табл. 1.4.

| ***P*** | ***Q*** | ***P*** $\oplus$ ***Q*** |
|---|---|---|
| И | И | Л |
| И | Л | И |
| Л | И | И |
| Л | Л | Л |

табл. 1.4.

**Пример1**

Обозначим через *P* высказывание «логика — забава», а через *Q* — «сегодня пятница». Требуется выразить каждое из следующих составных высказываний в символьной форме.

(а) Логика — не забава, и сегодня пятница.

(б) Сегодня не пятница, да и логика — не забава.

(в) Либо логика — забава, либо сегодня пятница.

**Решение**

(а) (не *P)* **и** *Q*.

(б) (не Р) **и** (не *Q)*.

(в) Р **или** *Q*.

## Законы алгебры логики

**1.** *Законы рефлексивности (идемпотентности)*

$a \lor a = a$

$a \land a = a$

**2.** *Законы коммутативности (переместительный)*

$a \lor b = b \lor a$

$a \land b = b \land a$

**3.** *Законы ассоциативности (сочетательный)*

$(a \land b) \land c = a \land (b \land c)$

$(a \lor b) \lor c = a \lor (b \lor c)$

**4.** *Законы дистрибутивности (распределительный)*

$a \land (b \lor c) = a \land b \lor a \land c$

$a \lor b \land c = (a \lor b) \land (a \lor c)$

**5.** *Закон двойного отрицания*

$\neg (\neg a) = a$

**6.** *Законы де Моргана*

$\neg (a \land b) = \neg a \lor \neg b$

$\neg (a \lor b) = \neg a \land \neg b$

**7.** *Законы поглощения*

$a \lor a \land b = a$

$a \land (a \lor b) = a$

**8.** *Операции с константами*

$a \lor 0 = a$ $\qquad$ $a \lor 1 = 1$

$a \land 1 = 1$ $\qquad$ $a \land 0 = 0$

**9.** *Закон исключающего третьего*

$a \lor \neg a = 1$ $\qquad\qquad$ $a \land \neg a = 0$

## Упражнения

**10.** Пусть *P, Q и R* — определенные следующим образом высказывания:

*P: Я* умираю от жажды.

*Q:* Мой стакан пуст.

*R*: Сейчас три часа.

Запишите каждое из следующих высказываний как логическое выражение, включающее *P, Q и R.*

(а) Я умираю от жажды и мой стакан не пуст.

(б) Сейчас три часа, а я умираю от жажды.

**11.** Обозначим через *P* высказывание: «розы красные», а через *Q* — «фиалки синие». Запишите каждое из следующих высказываний как логическое выражение.

(а) розы не красные и фиалки не синие;

(б) розы красные или фиалки не синие;

(в) либо розы красные, либо фиалки синие (но не одновременно)

Используя таблицы истинности, докажите логическую эквивалентность высказываний (а) и (б).

**12.** Составные высказывания, принимающие истинные значения при любых истинностных значениях своих компонент, называются *тавтологиями, С* помощью таблиц истинности найдите тавтологии среди следующих высказываний:

(а) $\textbf{не}\ (P\ \textbf{и}\ (\textbf{не}\ P))$;

(б) $P \Rightarrow (\textbf{не}\ P)$;

(в) $(P\ \textbf{и}\ (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$.

**13.** Запишите на языке логики суждений следующие сложные суждения:

1. Один из двоих знает другого.
2. Идет дождь, но нельзя сказать, что жарко.
3. Кто ясно мыслит, тот ясно излагает.
4. Или я тебя не понимаю, или ты не хочешь меня понять.
5. Не приходом люди богатеют, а расходом.

**14.** Запишите на языке логики суждений следующие сложные суждения:

1. Кризис неизбежен, разве что будут приняты экстраординарные экономические или
политические меры.
2. Если бы Иван IV был зол по природе и не заботился об интересах государства, то он не отменил бы опричнины.
3. Каждый, кому известны картины Рембрандта, восхищается их красотой.
4. Нельзя сказать, что чтение этого романа приятно или полезно.
5. Этот человек рыцарь, если только он не лжец.

**15.** При истинности исходного суждения “А знает В, но В не знает А”

определите истинностные значения следующих суждений:

1. А и В знают друг друга.
2. А и В не знают друг друга.
3. В знает А, или А не знает В.
4. Либо В не знает А, либо А знает В.
5. А не знает В, и В не знает А.
6. Неверно, что А и В не знают друг друга.
7. Если А не знает В, то В знает А.
8. Если В не знает А, то А не знает В.
9. А знает В тогда и только тогда, когда В знает А.

**16.** Переведите следующие суждения на язык логики суждений и с помощью

таблиц истинности определите логическое значение полученных сложных

суждений:

1. Неверно, что внеземные цивилизации существуют, и не существуют.
2. Речка движется и не движется.
3. Если А, то В; и В, следовательно, А.
4. Либо А, либо не-А, и А, следовательно, не-А.
5. Если он принадлежит нашей компании, то он храбр, и на него можно положиться, или если он не принадлежит к нашей компании, значит, он не храбр, и на него нельзя положиться.
6. «Вам никогда не удастся создать мудрецов, если будите убивать в детях шалунов». (Ж.Руссо)
7. «Кто утратил стыд, того нужно считать погибши». (Плавт)
8. «Верность друга нужна и в счастье, в беде же она совершенно необходима». (Сенека)

**17.** Найдите отрицание следующих высказываний:

1. Все головоломки имеют решение.
2. Существует хотя бы одно предложение, которое не является суждением.
3. Не всякий человек может ориентироваться в тайге.
4. Любой из тех, кто изучает логику, справится с этим заданием.

5. Ни один космический корабль не может подняться в космос без топлива.
6. Самая высокая горная вершина бала заметно ниже окружающих ее вершин.
7. Автомобили Волжского автогиганта не пользуются покупательским спросом.
8. Некоторые водители за рулем не курят.
9. Некоторые обвиняемые имеют право на защиту.
10. Ни один договор не может быть расторгнут в одностороннем порядке.
11. Если я подготовлюсь к экзамену, то я сдам его на «хорошо» или «отлично».
12. «Когда в товарищах согласья нет, на лад их дело не пойдет» (И.А.Крылов).
13. И зимой будет ягода, если заготовить загодя.
14. Если вы страдаете бессонницей, не старайтесь заснуть, а лучше встаньте и займитесь.
15. Он очень любит охоту, бридж и бильярд, поэтому можно сказать, что он азартен.
16. Если пойдет дождь, Ваня, Петя и Коля останутся дома.
17. Коля решит задачку, если он вспомнит нужную теорему.
18. Хотя бы один из мальчиков (Ваня, Петя, Коля) - ошибается.
19. Ни один из мальчиков (Ваня, Петя, Коля) не опоздал в школу.
20. В кино пойдет либо Коля, либо Петя.
21. Если урок будет интересным, никто из мальчиков – Петя, Ваня, Коля – не будет смотреть в окно.
22. Будет солнечная погода, но хотя бы ни один из мальчиков – Петя и Ваня – не пойдет в лес.
23. Учитель рассказал смешную историю, но никто из мальчиков – Петя и Ваня – не засмеялся.

**18.** Доказать законы алгебры логики (1-9)

**19.** Пусть а = “*это утро ясное*”, а b = “*это утро теплое*”. Выразите следующие формулы на обычном языке:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *а)* | $a \cdot b$ | *г)* | $\bar a \vee b$ | *ж)* | $\overline{a \cdot b}$ |
| *б)* | $a \cdot \bar b$ | *д)* | $a \vee \bar b$ | *з)* | $\overline{a \vee b}$ |
| *в)* | $\bar a \cdot \bar b$ | *е)* | $\bar a \vee \bar b$ | *и)* | $\overline{\bar a \cdot b}$ |

**20.*** Из двух данных высказываний а и b постройте составное высказывание, которое было бы:

**а)** истинно тогда и только тогда, когда оба данных выказывания ложны;
**б)** ложно тогда и только тогда, когда оба данных высказывания истинны.

**21.*** Из трех данных высказываний a, b, c постройте составное высказывание, которое истинно, когда истинно какое-либо одно из данных высказываний, и только в этом случае.

## 1.3. Логически эквивалентные высказывания. 2- 1- 1

**О. Логическое равенство (эквивалентность, следование, двойная импликация, равнозначность)** — логическая операция, позволяющая из двух высказываний A и B получить новое высказывание A ≡ B (читается «A эквивалентно B»). Эта операция может быть выражена связками «тогда и только тогда», «необходимо и достаточно», «равносильно». Для обозначения эквивалентности применяются знаки ~, ⇔.

Если оба высказывания имеют различные логические значения, результатом операции эквивалентности всегда будет ложь. Если же оба простые высказывания ложны или оба истинны, то составное логическое высказывание всегда будет истинно. Таблица истинности логического равенства обозначена как табл. 1.5.

| ***P*** | ***Q*** | ***P ~ Q*** |
|---|---|---|
| И | И | И |
| И | Л | Л |
| Л | И | Л |
| Л | Л | И |

табл. 1.5.

Высказывания называются **эквивалентными,** если соответствующие значения каждого из них совпадают в таблице истинности.

**Пример**

Показать, что высказывание **(не** *[P* **и** **(не** *Q)))* логически эквивалентно утверждению **((не** *P)* **или** *Q)*.

**Решение**

Заполним совместную таблицу истинности для составных высказываний: $R$ = ***(не** (P **и** (**не** Q)))* и *S= ((не P) **или** Q)*. Вспомогательные колонки используются для построения обоих выражений из P и Q.

| $P$ | $Q$ | **не** $P$ | **не** $Q$ | $P$ **и** (**не** $Q$) | $R$ | $S$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| И | И | Л | Л | Л | И | И |
| И | Л | Л | И | И | Л | Л |
| Л | И | И | Л | Л | И | И |
| Л | Л | И | И | Л | И | И |

Две последние колонки таблицы идентичны. Это означает, что высказывание *R* логически эквивалентно высказыванию *S*.

**О. Логическое следование (импликация)** — логическая операция, соединяющая два высказывания при помощи связки «если… то» в сложное высказывание. Операция символически обозначается с помощью знака → и читается «Если А, то В», «А влечет В», «из А следует В», «А имплицирует В». Для обозначения импликации применяются также знаки ⊃ или ⇒. Первое логическое высказывание является условием (посылкой), а второе — следствием (заключением).

Для операции импликации справедливо, что из лжи может следовать все что угодно, а из истины — только истина. Таким образом, импликация А → В ложна только тогда, когда А истинно, а В ложно (из истинного высказывания следует ложное). Во всех остальных случаях импликация истинна. Таблица истинности импликации обозначена как табл. 1.6.

| ***P*** | ***Q*** | ***P* → *Q*** |
|---|---|---|
| И | И | И |
| И | Л | Л |
| Л | И | И |

| | | |
|---|---|---|
| Л | Л | И |

табл. 1.6.

**Пример**

Высказывание ((не *Q)* => **(не** Р)) называется ***противоположным*** или ***контрапозитивным*** к высказыванию (P=>Q). Показать, что ((не *Q)* ^ **(не** Р)) логически эквивалентно высказыванию *(Р => Q)*.

**Решение**

Рассмотрим совместную таблицу истинности

| $P$ | $Q$ | **не** $P$ | **не** $Q$ | $(P \Rightarrow Q)$ | ((**не** $Q$) $\Rightarrow$ (**не** $P$)) |
|---|---|---|---|---|---|
| И | И | Л | Л | И | И |
| И | Л | Л | И | Л | Л |
| Л | И | И | Л | И | И |
| Л | Л | И | И | И | И |

Поскольку два последних столбца этой таблицы совпадают, то и высказывания, о которых идет речь, логически эквивалентны.

**Использование таблиц истинности для решения логических задач**

Аппарат алгебры логики позволяет применять к широкому классу логических задач универсальные методы, основанные на формализации условий задачи.

Одним из таких методов является построение таблицы истинности по условию задачи и её анализ. Для этого следует:

**1)** выделить из условия задачи элементарные (простые) высказывания и обозначить их буквами;

**2)** записать условие задачи на языке алгебры логики, соединив простые высказывания в составные с помощью логических операций;

**3)** построить таблицу истинности для полученных логических выражений;

**4)** выбрать решение — набор логических переменных (элементарных высказываний), при котором значения логических выражений соответствуют условиям задачи;

**5)** убедиться, что полученное решение удовлетворяет всем условиям задачи.

**Пример.** Три подразделения A, B, C торговой фирмы стремились получить по итогам года максимальную прибыль. Экономисты высказали следующие предположения:

1) если A получит максимальную прибыль, то максимальную прибыль получат B и C;

2) A и C получат или не получат максимальную прибыль одновременно;

3) необходимым условием получения максимальной прибыли подразделением C является получение максимальной прибыли подразделением B.

По завершении года оказалось, что одно из трёх предположений ложно, а остальные два истинны.

Выясним, какие из названных подразделений получили максимальную прибыль.

**Решение.** Рассмотрим элементарные высказывания**:**

• A — «A получит максимальную прибыль»;
• B — «B получит максимальную прибыль»;
• C — «C получит максимальную прибыль».
Запишем на языке алгебры логики прогнозы, высказанные экономистами:

1) $F_1 = A \to B \;\&\; C$;
2) $F_2 = A \;\&\; C \vee \overline{A} \;\&\; \overline{C}$;
3) $F_3 = C \to B$.

Составим таблицу истинности для $F_1$, $F_2$, $F_3$.

| $A$ | $B$ | $C$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Теперь вспомним, что из трёх прогнозов $F_1$, $F_2$, $F_3$ один оказался ложным, а два других — истинными. Эта ситуация соответствует четвёртой строке таблицы. Таким образом, максимальную прибыль получили подразделения B и C.

## Упражнения

**22.**

Покажите, что высказывание $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ логически эквивалентно высказыванию $((\text{**не** } P) \Rightarrow R)$ **и** $(Q \Rightarrow R)$.

**23.** Пусть *P* — (ложное) высказывание 1 = 5, *Q* — (тоже ложное) высказывание 3 = 7 и *R* — (истинное) утверждение 4 = 4. Показать, что условные высказывания: «если *P*, то *Q*» и «если *P*, то *R*», — оба истинны.

**24.*** Определите с помощью таблиц истинности, какие из следующих формул являются тождественно истинными или тождественно ложными:

а) $\overline{\bar{a} \cdot a} \vee b \cdot (a \cdot b \vee b)$

б) $((a \vee \bar{b}) \rightarrow b) \cdot (\bar{a} \vee b)$

в) $\overline{a \cdot b} \leftrightarrow (\bar{a} \vee \bar{b})$

г) $a \cdot b \cdot (c \vee \bar{e} \vee d) \cdot \bar{b}$

д) $a \cdot (b \cdot (\bar{a} \vee \bar{b}))$

е) $\overline{(\bar{a} \vee b) \cdot (\bar{b} \vee c)} \vee \bar{a} \vee c$

ж) $\overline{(a \rightarrow b) \leftrightarrow (\bar{b} \rightarrow \bar{a})}$

**25.** На вопрос, кто из трёх учащихся изучал логику, был получен ответ: «Если изучал первый, то изучал и второй, но неверно, что если изучал третий, то изучал и второй». Кто из учащихся изучал логику?

**26.** Однажды некий путешественник гостил на острове рыцарей и лжецов. Там ему встретились два местных жителя. Путешественник спросил одного из них: «Кто-нибудь из вас рыцарь?» Его вопрос не остался без ответа, и он узнал то, что хотел. Кем был островитянин, к которому путешественник обратился с вопросом, — рыцарем или лжецом? Кем был другой островитянин?

**27.*** В симфонический оркестр приняли на работу трёх музыкантов — Борисова, Сергеева и Васечкина, умеющих играть на скрипке, флейте, альте, кларнете, гобое и трубе. Каждый из музыкантов владеет двумя инструментами.

Известно, что**:**

1) Сергеев — самый высокий;

2) играющий на скрипке меньше ростом играющего на флейте;

3) играющие на скрипке и флейте и Борисов любят пиццу;

4) когда между альтистом и трубачом возникает ссора, Сергеев мирит их;

5) Борисов не умеет играть ни на трубе, ни на гобое.

Выясните, на каких инструментах играет каждый из музыкантов.

# Глава 2. Предикаты и кванторы.

Центральная идея математической логики состоит в том, чтобы записывать математические утверждения в виде последовательностей символов и оперировать с ними по формальным правилам. При этом правильность рассуждений можно проверять механически, не вникая в их смысл.

Иногда высказывания касаются свойств объектов или отношений между объектами. Кроме того, необходимо иметь возможность утверждать, что любые или какие-то объекты обладают определенными свойствами или находятся в некоторых отношениях.

Поэтому следует расширить логику высказываний и построить такую логическую систему, в рамках которой можно было бы исследовать структуру и содержание тех высказываний, которые в рамках алгебры высказываний считались бы элементарными.

Такой логической системой является логика предикатов, а алгебра высказываний — ее составной частью.

## 2.1. Какие высказывания называют предикатами. Кванторы.

### Предикаты

Понятие предиката обобщает понятие «высказывание».

Если аргумент один — то предикат выражает свойство аргумента, если больше — то отношение между аргументами.

**О. Одноместным предикатом** называется функция одной переменной, значениями которой являются высказывания об объектах, представляющих значения аргумента.

**О. Одноместный предикат** *P(x)* — это произвольная функция переменной *x*, определенная на некотором множестве **М** и принимающая (логические) значения из множества {Л, И}.

**О.** Множество **М**, на котором определен предикат *P(x),* называется **предметной областью** или **областью определения** предиката, а сама переменная *x*— предметной переменной.

Таким образом, одноместный предикат *P(x)* — это утверждение об объекте *x*, где *x* рассматривается как переменная.

При фиксации значения переменной *x* об утверждении *P(x)* можно сказать, истинно оно или ложно.

То есть если в *P(x)* вместо *x* подставить конкретный изучаемый объект *a*, то получаем высказывание, принадлежащее алгебре высказываний.

**О. Областью истинности** предиката *P(x),* заданного на множестве ***M,*** называется совокупность всех *x* из ***M,*** при которых данный предикат обращается в истинное высказывание:

$I_P = \{x \in \boldsymbol{M} \mid P(x) = 1\}$ .

Иными словами, область истинности предиката есть подмножество его предметной области, на котором данный предикат принимает значение **1**.

**О.** Предикат $P(x)$ , определенный на $\boldsymbol{M}$ , называется **тождественно истинным,** если $I_P = M$, и **тождественно ложным,** если $I_P = \emptyset$ .

Аналогично можно определить двуместный предикат

**О. Двуместный предикат** *P(x,y)* — это произвольная функция двух переменных $x$ и $y$, определенная на некотором множестве $\mathbf{M} = \mathbf{M_1} \times \mathbf{M_2}$ и принимающая (логические) значения из множества {Л, И}.

**Примеры.**

1. $x^2 - x - 2 = 0$ — предикат. Здесь $x \in \mathbb{R}$, $I_P = \{-1, 2\}$.

2. Пусть $M = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Предикаты $P(x)$ = «$x$ — простое число» и $Q(x)$ = «$x$ — четное число» заданы на множестве $M$. Требуется найти области истинности этих предикатов.

**Решение.** Очевидно, мы имеем $I_P = \{3, 5, 7\}$ и $I_Q = \{4, 6, 8\}$.

3. Найти область истинности предиката

$$P(x, y) = «y - x^2 \geq 0»$$

и изобразить его на координатной плоскости.

**Решение.** Область истинности данного предиката — часть плоскости $Oxy$, заключенная между ветвями параболы $y = x^2$.

4. Найти область истинности предиката

$$B(x, y) = «x^2 + y^2 < 5»,$$

заданного на множестве $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ $(\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\})$.

**Ответ:** $\{(0;\ 0),\ (0;\ 1),\ (0;\ 2),\ (1;\ 0),\ (1;\ 1),\ (2;\ 0)\}$.

# Кванторы

Функциональная природа предиката влечет за собой введение еще одного понятия — квантора.

Квантор — это общее название для логических операций, ограничивающих область истинности какого-либо предиката.

**Квантор всеобщности ∀ и квантор существования ∃.**

**О**. Пусть P($x$) —одноместный предикат, определенный на множестве $\boldsymbol{M}$. Под выражением $\forall x$ P($x$) понимают высказывание, истинное, если P($x$) истинно для каждого элемента $x \in \boldsymbol{M}$, и ложное в противном случае.

Истинность высказывания $\forall x$ P($x$) означает, что область истинности предиката P($x$) совпадает с областью изменения переменной $x$. Читается это высказывание: «для всякого $x$ истинно P($x$) ».

Под выражением $\exists\ x$ P($x$) понимают высказывание, истинное, если существует $x \in \boldsymbol{M}$, для которого P($x$) истинно, и ложное в противном случае.

Истинность высказывания $\exists\ x$ P($x$) означает, что область истинности предиката P($x$) не пуста. Читается это высказывание: «существует $x$, при котором P($x$) истинно».

О высказывании $\forall x$ P($x$) (соответственно, $\exists\ x$ P($x$) ) говорят, что оно **получено из предиката *P* навешиванием квантора всеобщности (соответственно, квантора существования) по переменной *x* .**

Переменная, на которую навешен квантор, называется связанной переменной.

**Пример**

Какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны?

(а) Сумма внутренних углов любого треугольника равна 180°.

(б) У всех кошек есть хвост.

(в) Найдется целое число x, удовлетворяющее соотношению $x^2 = 2$.

(г) Существует простое четное число.

**Решение**

(а) Истинно.

(б) Ложно. У бесхвостой (разновидность домашней кошки) кошки хвоста нет.

(в) Ложно.

(г) Истинно. Число 2 является и простым, и четным.

В данном примере мы имеем дело с набором объектов и утверждениями о том, что некоторое свойство имеет место *для всех* рассматриваемых объектов, или что *найдется (существует)* по крайней мере, один объект, обладающий данным свойством.

Выражения *«для* всех» и «найдется» («существует») называются кванторами и обозначаются, соответственно, V и 3. Включая в предикат кванторы, мы превращаем его в высказывание. Поэтому предикат с кванторами может быть истинным или ложным.

Если некоторый предикат P($x$) определен на конечном множестве $\boldsymbol{M} = \{a_1, \ldots, a_k\}$ , то справедливы следующие тождества:

$$\forall x\, P(x) \sim P(a_1) \wedge \ldots \wedge P(a_k); \quad \exists\, x\, P(x) \sim P(a_1) \vee \ldots \vee P(a_k).$$

Таким образом, квантор всеобщности обобщает конъюнкцию, а квантор существования — дизъюнкцию.

Навешивать кванторы можно и на многоместные предикаты и вообще на любые логические выражения.

Выражение, на которое навешивается квантор $\forall x$ или $\exists\ x$ , называется **областью действия квантора**;

Все вхождения переменной $x$ в это выражение являются связанными.

Не связанные кванторами переменные называются **свободными переменными.**

Например,

к предикату от двух переменных $P(x,\ y)$ кванторные операции можно применить к одной переменной или к двум переменным. Получаем следующие высказывания:

$$\forall x\, P(x,y);\quad \forall y\, P(x,y);\quad \exists\, x\, P(x,y);\quad \exists\, y\, P(x,y);$$

$$\forall x \exists\, y\, P(x,y);\quad \forall x \forall y\, P(x,y);\quad \exists\, x \forall y\, P(x,y);\quad \exists\, x \exists\, y\, P(x,y);$$

$$\forall y \forall x\, P(x,y);\quad \forall y \exists\, x\, P(x,y);\quad \exists\, y \forall x\, P(x,y);\quad \exists\, y \exists\, x\, P(x,y).$$

В общем случае изменение порядка следования кванторов изменяет смысл высказывания и его логическое значение.

**Примеры**

1. Пусть $P(x,y)$ = «$x$ является матерью $y$». Тогда

$$\forall y \exists\, x\, P(x,y) = \text{«у каждого человека есть мать»},$$

$$\exists\, x \forall y\, P(x,y) = \text{«существует мать всех людей»}.$$

Таким образом, перестановка кванторов изменяет смысл высказывания и его логическое значение (первое высказывание истинно, второе — ложно).

2. Установить истинность или ложность высказывания:

$$\exists x \left( x \in \{2{,}5\} \to \left(x^2 - 6x + 8 = 0\right)\right).$$

**Решение.** Уравнение $x^2 - 6x + 8 = 0$ имеет корни $x_1 = 2$; $x_2 = 4$. Используя тождество $A \to B \sim \neg(A \wedge \neg B)$, исходное высказывание преобразуем к виду:

$$\exists x \left( x \in \{2{,}5\} \to \left(x^2 - 6x + 8 = 0\right)\right) \sim$$

$$\sim \exists x \overline{\left( x \in \{2{,}5\} \wedge \overline{\left(x^2 - 6x + 8 = 0\right)}\right)} \sim$$

$$\sim \exists x \overline{\left( x \in \{2{,}5\} \wedge x \notin \{2{,}4\}\right)} \sim \exists x \,\overline{(x = 5)} \sim \exists x \,(x \neq 5).$$

Следовательно, исходное высказывание истинно.

## Упражнения

**28.** Обозначим через *x* слово «кошка», а через *P(x)* предикат «у *x* есть усы». Запишите каждое из высказываний в символьной форме:

(а) усы есть у всех кошек;

(б) найдется кошка без усов;

(в) не бывает кошек с усами.

Запишите отрицание высказывания (б) в символьной форме, а отрицание высказывания (в) запишите как символами, так и словами.

**29.** Пусть *P(x)* означает *«x* высокий», а *Q(x)* — *«x* толстый», где *X* — какой-то человек. Прочитайте высказывание:

$$\forall x \ (P(x) \ \textbf{и} \ Q(x)).$$

Найдите его отрицание среди следующих утверждений:

(а) найдется некто короткий и толстый;

(б) нет никого высокого и худого;

(в) найдется некто короткий или худой.

**30.** Выведите высказывание «Если две прямые пересекаются, то они не параллельны» из высказывания «Если две прямые параллельны, то они не пересекаются» с помощью логики предикатов.

**31.** Даны предикаты *P(x):* «$x^2 - 9 = 0$» и *Q(x):* «$5x - 3 = 18$». Найти области истинности этих предикатов, если их область определения есть: 1) $R$; 2) $N$.

**32.** Показать, что кванторы общности и существования не перестановочны, то есть высказывания $\forall x \exists y F(x, y)$ и $\exists y \forall x F(x, y)$ могут иметь различные значения.

**33.** Доказать равносильности:

а) $C \wedge \forall x A(x) \equiv \forall x [C \wedge A(x)]$ ;

б) $\exists x [A(x) \vee B(x)] \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ ;

в) $\exists x [B(x) \to C] \equiv \forall x B(x) \to C$

**34.** Доказать, что формулы $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ и $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$

не равносильны.

**35.** (законы де Моргана для кванторов) Следующие формулы логики предикатов являются тавтологиями:

1. $\neg(\forall x)(P(x)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x))$;

2. $\neg(\exists x)(P(x)) \leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x))$.

Докажите их истинность.

**36.** (выражение кванторов одного через другой) Следующие формулы логики предикатов являются тавтологиями:

1. $(\forall x)(P(x)) \leftrightarrow \neg(\exists x)(\neg P(x))$;

2. $(\exists x)(P(x)) \leftrightarrow \neg(\forall x)(\neg P(x))$.

Докажите их истинность.

**37.** (законы перенесения кванторов через конъюнкцию и дизъюнкцию) Следующие формулы логики предикатов являются тавтологиями:

1. $(\forall x)(P(x) \land Q(x)) \leftrightarrow (\forall x)(P(x)) \land (\forall x)(Q(x))$;

2. $(\exists x)(P(x) \lor Q(x)) \leftrightarrow (\exists x)(P(x)) \lor (\exists x)(Q(x))$ ;

3. $(\forall x)(P(x) \lor Q) \leftrightarrow (\forall x)(P(x)) \lor Q$;

4. $(\exists x)(P(x) \land Q) \leftrightarrow (\exists x)(P(x)) \land Q$.

Докажите их истинность.

**38.** (законы перенесения кванторов через импликацию) Следующие формулы логики предикатов являются тавтологиями:

1. $(\forall x)(P(x) \to Q) \leftrightarrow ((\exists x)(P(x)) \to Q)$;

2. $(\exists x)(P(x) \to Q) \leftrightarrow ((\forall x)(P(x)) \to Q)$;

3. $(\forall x)(Q \to P(x)) \leftrightarrow (Q \to (\forall x)(P(x)))$;

4. $(\exists x)(Q \to Q(x)) \leftrightarrow (Q \to (\exists x)(P(x)))$.

Докажите их истинность.

**39.** (законы введения квантора общности и введения квантора существования) Следующие формулы логики предикатов являются тавтологиями:

1. $(\forall x)(P(x)) \longrightarrow (P(y))$;

2. $P(y) \longrightarrow (\exists x)(P(x))$.

Докажите их истинность.

**40.** (законы коммутативности для кванторов) Следующие формулы логики предикатов являются тавтологиями:

1. $(\forall x)(\forall y)(P(x,y)) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)(P(x,y))$;

2. $(\exists x)(\exists y)(P(x,y)) \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)(P(x,y))$;

3. $(\exists y)(\forall x)(P(x,y)) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(P(x,y))$.

Докажите их истинность.

# Раздел 3. Методы доказательств.

Понятие доказательства в практике исследовательской деятельности рассматривается как приведение любых аргументов, подтверждающих некоторое положение. Такими аргументами могут быть факты, проверенные положения, заключения, точки зрения признанных авторитетов, результаты эксперимента.

Не все и не всегда можно доказать при помощи фактов, да и не всегда существуют доступные восприятию факты. В этом случае доказываемые положения выводятся из других, достоверность которых полагается установленной.

**Доказательство** — это интеллектуальная операция, состоящая в установлении истинности некоторого суждения, посредством его вывода из других суждении, истинность которых полагается установленной до этой операции и независимо от нее, а также посредством подтверждения фактами и практической деятельностью.

## 3.1. Доказательство прямым рассуждением.

Предполагаем, что высказывание A истинно и показываем справедливость B. Такой способ доказательства исключает ситуацию, когда A истинно, а B – ложно, поскольку именно в этом и только в этом случае импликация ($A \rightarrow B$) принимает ложное значение (см. табл 1.6).

Таким образом, прямое доказательство идет от рассмотрения аргументов к доказательству тезиса, т. е. истинность тезиса непосредственно обосновывается аргументами. Схема этого доказательства такая: из данных аргументов *(a, b, c, ...*) необходимо следует доказываемый тезис *q*.

По этому типу проводятся доказательства в судебной практике, в науке, в полемике, в сочинениях школьников, при изложении материала учителем и т. д.

**Примеры:**

1. На уроках химии прямое доказательство о горючести сахара может быть представлено в форме категорического силлогизма: Все углеводы - горючи. Сахар - углевод. Сахар горюч.

2. Покажите прямым способом рассуждений, что произведение $xy$ двух нечетных целых чисел $x$ *и* $y$ всегда нечетно.

**Решение.** Прежде всего заметим, что любое нечетное число, и в частности $x$, можно записать в виде $x = 2m + 1$, где $m$ — целое число. Аналогично, $y = 2n + 1$ *с* некоторым целым $n$.

Значит, произведение

$$xy = (2m + 1)(2n + 1) = 4\mathrm{mn} + 2\mathrm{m} + 2\mathrm{n} + 1 = 2(2\mathrm{mn} + \mathrm{m} + \mathrm{n}) + 1$$

тоже является нечетным числом.

# Упражнения

**41.** Прямым рассуждением докажите истинность высказывания: $n$ и $m$ — четные числа, тогда $(n + m)$ — число четное.

**42.** Докажите, что конь не сможет пройти с поля a1 на поле h8, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?

**43.** Докажите, что нельзя выпуклый 17-угольник разрезать на параллелограммы?

**44.** На плоскости расположено 9 шестеренок, соединенных по цепочке. Докажите, что все шестеренки не смогут вращаться одновременно?

**45.** Предложите высказывание (или найдите в школьных учебниках теорему) и докажите его истинность. Проведите логический анализ своего доказательства.

## 3.2. Доказательство обратным рассуждением.3-1-2

Предполагаем, что высказывание B ложно и показываем ошибочность A. То есть, фактически, прямым способом проверяем истинность импликации ((не B)→(не A)), что согласно таблицы, логически эквивалентно истинности исходного утверждения (A→B).

**Пример** Пусть $n$ — натуральное число. Покажите, используя обратный способ доказательства, что если $n^2$ нечетно, то и $n$ нечетно.

**Решение.** Отрицанием высказывания о нечетности числа $n^2$ служит утверждение «$n^2$ четно», а высказывание о четности $n$ является отрицанием утверждения «число $n$ нечетно». Таким образом, нам нужно показать прямым способом рассуждений, что четность числа $n$ влечет четность его квадрата $n^2$. Так как $n$ четно, то $n = 2m$ для какого-то целого числа $m$ . Следовательно, $n^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$ — четное число.

## Упражения

**46.** Дайте обратное доказательство высказывания: $n^2$ *— четное число, тогда* $n$ — четное.

**47.** Докажите, что нельзя нарисовать 9 - звенную замкнутую ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев?

**48.** Семь тринадцатируков с планеты Тринадцатирук решили устроить турнир по армреслингу. Докажите, что они не смогут одновременно провести поединки для всех своих рук, чтобы все руки принимали участие, и в каждом поединке встречалось ровно две руки?

**49.** В каждой клетке шахматной доски записано число. Оказалось, что любое число равно среднему арифметическому чисел, записанных в соседних (по стороне) клетках. Докажите, что все числа равны.

**50.** Предложите высказывание (или найдите в школьных учебниках теорему) и докажите его истинность. Проведите логический анализ своего доказательства.

## 3.3. Метод доказательства «от противного».3-1-2

Этот метод часто используется в математике. Предположив, что высказывание $P$ истинно, а $Q$ ложно, используя аргументированное рассуждение, получаем противоречие. Этот способ опять-таки основан на том, что импликация *(P → Q)* принимает ложное значение только тогда, когда $P$ истинно, а $Q$ ложно.

**Пример**. Методом «от противного» покажите, что решение уравнения $x^2 = 2$ является иррациональным числом, т. е. не может быть записано в виде дроби с целыми числителем и знаменателем.

**Решение.** Здесь нам следует допустить, что решение $x$ уравнения $x^2 = 2$ рационально, т. е. записывается в виде дроби $x = \frac{m}{n}$ с целыми $m$ и $n$ причем $n \neq 0$. Предположив это, нам необходимо получить противоречие либо с предположением, либо с каким-то ранее доказанным фактом.

Как известно, рациональное число неоднозначно записывается в виде дроби. Например, $x = \frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} = \frac{3m}{3n}$ и т. д. Однако можно считать, что $m$ и $n$ не имеют общих делителей. В этом случае неоднозначность записи пропадает.

Итак, предполагаем дополнительно, что дробь $x = \frac{m}{n}$ несократима ($m$ и $n$ не имеют общих делителей). По условию число $x$ удовлетворяет уравнению $x^2 = 2$. Значит, $(\frac{m}{n})^2 = 2$, откуда $m^2 = 2n^2$. Из последнего равенства следует, что число $m^2$ четно. Следовательно, $m$ тоже четно (см. упр. а(б)) и может быть представлено в виде $m = 2p$ для какого-то целого числа $p$. Подставив эту информацию в равенство $m^2 = 2n^2$, мы получим, что $44p^2 = 2n^2$, т. е. $n^2 = 2p^2$. Но тогда $n$ тоже является четным числом. Таким образом, мы показали, что как $n$, так и $m$ — четные числа. Поэтому они обладают общим делителем 2. Если же теперь вспомнить, что мы предполагали отсутствие общего делителя у числителя и знаменателя дроби $\frac{m}{n}$, то увидим явное противоречие.

Найденное противоречие приводит нас к однозначному выводу: решение уравнения $x^2 = 2$ не может быть рациональным числом, т. е. оно иррационально.

Примеров доказательства “от противного” очень много в школьном курсе математики. Так, пример, доказывается теорема о том, что из точки, лежащей вне прямой, на эту прямую можно опустить лишь один перпендикуляр.

## Упражнения

**51.** Методом «от противного» докажите, что если $(n + m)$ — нечетное число тогда одно из слагаемых является четным, а другое — нечетным.

**52.** Методом «от противного» докажите, что «если две прямые перпендикулярны к одной и той же плоскости, то они параллельны».

**53.** Если прямые параллельны, то внутренние односторонние углы, образованные при пересечении этих прямых секущей, не могут быть оба тупыми (вариант: Если прямые параллельны, то все углы, образованные при пересечении этих прямых секущей, не могут быть тупыми).

**54.** Если прямые параллельны, то внутренние односторонние углы, образованные при пересечении этих прямых секущей, не могут быть оба острыми (вариант: Если прямые параллельны, то все углы, образованные при пересечении этих прямых секущей, не могут быть острыми).

**55.** Предложите высказывание (или найдите в школьных учебниках теорему) и докажите его истинность. Проведите логический анализ своего доказательства.

## 3.4. Практикум решения задач.3-0-3

**56.** Три девочки — Роза, Маргарита и Анюта представили на конкурс цветоводов корзины выращенных ими роз, маргариток и анютиных глазок. Девочка, вырастившая маргаритки, обратила внимание Розы на то, что ни у одной из девочек имя не совпадает с названием любимых цветов. Какие цветы вырастила каждая из девочек?

**57.** Виновник ночного дорожно-транспортного происшествия скрылся с места аварии.
Первый из опрошенных свидетелей сказал работникам ГАИ, что это были “Жигули”, первая цифра номера машины — единица. Второй свидетель сказал, что машина была марки “Москвич”, а номер начинался с семёрки. Третий свидетель заявил, что машина была иностранная, номер начинался не с единицы. При дальнейшем расследовании выяснилось, что каждый из свидетелей правильно указал либо только марку машины, либо только первую цифру номера. Какой марки была машина и с какой цифры начинался номер?

**58.** Пятеро одноклассников: Ирена, Тимур, Камилла, Эльдар и Залим стали победителями олимпиад школьников по физике, математике, информатике, литературе и географии.
Известно, что:

- победитель олимпиады по информатике учит Ирену и Тимура работе на компьютере;
- Камилла и Эльдар тоже заинтересовались информатикой;
- Тимур всегда побаивался физики;

- Камилла, Тимур и победитель олимпиады по литературе занимаются плаванием;
- Тимур и Камилла поздравили победителя олимпиады по математике;
- Ирена сожалеет о том, что у нее остается мало времени на литературу.

Победителем какой олимпиады стал каждый из этих ребят?

**59.** Ирена любит мороженое с фруктами. В кафе был выбор из таких вариантов:

- пломбир с орехами;
- пломбир с бананами;
- пломбир с черникой;
- шоколадное с черникой;
- шоколадное с клубникой.

В четырёх вариантах Ирене не нравились или тип мороженого, или наполнитель, а в одном варианте ей не нравились ни мороженое, ни наполнитель. Она попросила приготовить из имеющихся продуктов порцию по своему вкусу. Какое же мороженое и с какими фруктами любит Ирена?

**60.** На очередном этапе автогонок “Формула 1” первые четыре места заняли Шумахер, Алези, Хилл и Кулхардт. Опоздавший к месту награждения телерепортёр успел заснять пилотов, занявших второе и третье места, которые поливали друг друга шампанским. В это время Шумахер с четвёртым гонщиком пожимали друг другу руки. Далее в кадр попал мокрый Хилл, поздравляющий пилота, занявшего второе место. Напоследок оператор снял сцену, в которой Шумахер и Кулхардт пытались втащить на пьедестал почёта пилота, занявшего четвёртое место. Просматривая отснятый материал, режиссёр спортивного выпуска быстро разобрался, кто из пилотов какое место занял. Он знал, что, в соответствии с церемонией награждения победителей гонок, пилоты, занявшие первые три места, поливают друг друга шампанским из огромных бутылок знаменитой фирмы — спонсора соревнований. Какое же место занял каждый пилот?

**61.** В некотором царстве-государстве повадился Змей Горыныч разбойничать. Послал царь четырёх богатырей погубить Змея, а награду за то обещал великую. Вернулись богатыри с победой и спрашивает их царь: “Так кто же из вас главный победитель, кому достанется царёва дочь и полцарства?” Засмущались добры молодцы и ответы дали туманные: Сказал Илья Муромец: “Это все Алеша Попович, царь-батюшка”. Алеша Попович возразил: “То был Микула Селянинович”. Микула Селянинович: “Не прав Алеша, не я это”. Добрыня Никитич: “И не я, батюшка”. Подвернулась тут баба Яга и говорит царю: “А прав то лишь один из богатырей, видела я всю битву своими глазами”.
Кто же из богатырей победил Змея Горыныча?

**62.*** При составлении расписания на пятницу были высказаны пожелания, чтобы информатика была первым или вторым уроком, физика — первым или третьим, история — вторым или третьим. Можно ли удовлетворить одновременно все высказанные пожелания?

**63.*** Обсуждая конструкцию нового трёхмоторного самолёта, трое конструкторов поочередно высказали следующие предположения:
1) при отказе второго двигателя надо приземляться, а при отказе третьего можно продолжать полёт;
2) при отказе первого двигателя лететь можно, или при отказе третьего двигателя лететь нельзя;
3) при отказе третьего двигателя лететь можно, но при отказе хотя бы одного из остальных надо садиться.
Лётные испытания подтвердили правоту каждого из конструкторов.
Определите, при отказе какого из двигателей нельзя продолжать полёт.

**64.*** В соревнованиях по плаванию участвовали Андрей, Виктор, Саша и Дима. Их друзья высказали предположения о возможных победителях:

1) первым будет Саша, Виктор будет вторым;

2) вторым будет Саша, Дима будет третьим;

3) Андрей будет вторым, Дима будет четвёртым.

По окончании соревнований оказалось, что в каждом из предположений только одно из высказываний истинно, другое ложно.

Какое место на соревнованиях занял каждый из юношей, если все они заняли разные места.

**65.** *Для длительной международной экспедиции на околоземной космической станции надо из восьми претендентов отобрать шесть специалистов: по аэронавтике, космонавигации, биомеханике, энергетике, медицине и астрофизике. Условия полёта не позволяют совмещать работы по разным специальностям, хотя некоторые претенденты владеют двумя специальностями. Обязанности аэронавта могут выполнять Геррети и Нам; космонавигатора — Кларк и Фриш; биомеханика — Фриш и Нам; энергетика — Депардье и Леонов; врача — Депардье и Хорхес; астрофизика — Волков и Леонов.

По особенностям психологической совместимости врачи рекомендуют совместные полеты Фриша и Кларка, а также Леонова с Хорхесом и Депардье. Напротив, нежелательно, чтобы Депардье оказался в одной экспедиции с Намом, а Волков — с Кларком. Кого следует включить в состав экспедиции?